Elementêre topologie en berekeningsuniversaliteit

Elementary topology and universal computation

PH POTGIETER
Departement Besluitkunde
Universiteit van Suid-Afrika (Pretoria)
Posbus 392, Unisa, 0003
php@member.ams.org / potgiph@unisa.ac.za

PETRUS POTGIETER (gebore 1968) voltooi in 1992 die graad MA(Math) aan die Kent State University in die VSA en keer terug na Suid-Afrika in dieselfde jaar vir doktorale studies by die Universiteit van Pretoria waar die graad PhD (Wiskunde) aan hom toegeken word in 1996. In 1995–1996 is hy werksaam aan die Universiteit van Stellenbosch. Sedert 1997 is hy by die Universiteit van Suid-Afrika in Pretoria, in die Departement Besluitkunde.

PETRUS POTGIETER (born 1968) completed the degree MA(Math) at Kent State University in the USA and returned to South Africa during the same year for doctoral studies, obtaining the degree PhD (Mathematics), awarded to him in 1996. During 1995–1996 he worked at the University of Stellenbosch. Since 1997 he has been employed at the University of South Africa in Pretoria, in the Department of Decision Sciences.

ABSTRACT

This paper attempts to define a general framework for computability on an arbitrary topological space X. The elements of X are taken as primitives in this approach—also for the coding of functions—and, except when $X = \mathbb{N}$, the natural numbers are not used directly. The natural numbers, incidentally, are let in through the back door, as it were, only through the use of the concept of a topology. *For, in topology one uses the fact that the unions indexed by a natural number (seen as a finite ordinal) of open sets should be open. The topology determines the notion of* continuous function *and if we require that the computable functions be continuous then the role of the natural numbers becomes, once again, impossible to overlook. The conditions for being a* topological computation space *that are given here, are necessary but far from sufficient for most purposes. This is done on purpose, so as to keep the discussion as general as possible. The usual notion of* computational universality *requires that a computational structure should have the* pair encoding property.

Definition *A computational structure $\mathscr{F}$ on X has the* pair encoding property *whenever there exists a total computable and bijective $h : X^2 \to X$ that has a computable inverse.*

We define the pinprick property *(PPP) for a topological space:*

Definition *A topology τ on X has the* pinprick property *(PPP) whenever*

- *for every open set $U \in \tau$ with $x \in U$, it is the case that $U \setminus \{x\}$ can be written as the union of two non-empty disjoint open sets; but*

- *for each $y \in V \in \tau \times \tau$ there exists a $W \in \tau \times \tau$ with $y \in W \subseteq V$, such that W cannot be written as the union of two non-empty disjoint open sets in $\tau \times \tau$.*

Here $\tau \times \tau$ is the product topology on X^2 and not the set theoretic product of τ with itself, of course.

The main result follows, trivially.

Theorem *Suppose $(X, \mathscr{F}, \tau)$ to be a topological computation space with the pinprick property (PPP). Then $\mathscr{F}$ does not have the pair encoding property.*

Since, for example, every dense linear order has the PPP, it follows immediately that no pair encoding property can be obtained for these spaces and no computational framework analogous to that for $\mathbb{N}$ can be defined on these spaces. The result hinges on a special case of the more general question: when is X^2 topologically equivalent to X? Brouwer proved[1] in 1911 that R^n and R^m are topologically equivalent only when $m = n$. As far as the author is aware, some aspects of this question remain open although it has been demonstrated for many special spaces (e.g. complete and separable metric spaces) that the generalised plane X^2 is not equivalent to the generalised line X. A recent paper[2] of Tsereteli and Zambakhidze includes a good overview of some of these results.

Key concepts: Universal computation, topology, dimension theory, pinprick property, computation over the real numbers.

Trefwoorde: Universele berekening, topologie, dimensieteorie, speldprikeienskap, berekening oor die reële getalle.

OPSOMMING

In hierdie bydrae word gepoog om ’n algemene raamwerk te beskryf waarin berekenbaarheid vir ’n willekeurige topologiese ruimte X gedefinieer kan word. Die elemente van X word in dié benadering beskou as die primitiewe voorwerpe – ook vir die kodering van funksies. Ons begin deur nodige (maar nie noodwendig voldoende) voorwaardes te stel waaraan ’n stel funksies wat as *berekenbaar* beskou word, moet voldoen. Die voorwaardes in die definisie van ’n *topologiese berekeningsruimte* wat gebruik word is ook nodig maar nie voldoende nie. ’n *Speldprikeienskap* vir topologiese ruimtes word gedefinieer. Baie topologiese ruimtes waaroor ons graag sou bereken het wel die speldprikeienskap. Die hoofresultaat is dat ruimtes met die speldprikeienskap nie die *paarkoderingseienskap*, wat nodig is vir ’n bruikbare berekenbaarheidsbegrip, het nie. Die afwesigheid van die paarkoderingseienskap beteken dat ons nie op die gebruiklike wyse in dié topologiese berekeningsruimtes ’n universele funksie kan definieer nie.

1. INLEIDING

Dit is gebruiklik om berekening te beskou oor $\mathbb{N}$, die versameling natuurlike of telgetalle. Die teorie van berekening met die telgetalle as invoer en afvoer is natuurlik die basis van digitale rekenaars wat ons alledaags gebruik en dié teorie is gebaseer op die universele Turing-masjien (UTM) en sy gelykes.[3] Dit is gerieflik en intuïtief om met die telgetalle te werk want hulle kan gerieflik voorgestel word met eindige stringe van enige eindige alfabet, byvoorbeeld in binêre notasie. Rasionale getalle is ook maklik om te hanteer omdat elke positiewe rasionale getal voorgestel kan word op ’n eenduidige manier as die kwosiënt van twee telgetalle met 1 as grootste gemene deler. Dit is maklik om te dink dat die uitbreiding van die berekenbaarheidsbegrip na, byvoorbeeld, die reële getalle, 'n onbelangrike tegniese detail is. Ongelukkig blyk dit nie so te wees nie.

Die *natuurlike* voorwerpe in die wiskundige analise en die fisika is nie net telgetalle of rasionale getalle nie. Ons weet immers lankal dat die diagonaal van 'n eenheidsvierkant die lengte $\sqrt{2}$ het en dat dít 'n irrasionale getal is. Watter soort getal is c, die spoed van lig in die vakuum, of Newton se gravitasiekonstante G, dan? Wel, in Suid-Afrika is c nou al amper 25 jaar lank die telgetal

$$299\,792\,458\ \mathrm{ms}^{-1}$$

omdat ons die metrieke stelsel gebruik en die meter in 1983 herdefinieer is deur die gesaghebbende *Conférence générale des poids et mésures* as die afstand wat lig in 'n vakuum aflê in $\frac{1}{299\,792\,458}$ van 'n sekonde. Ons het egter geen idee of die gravitasiekonstante G 'n rasionale getal is (in ons eenhede) nie en 'n mens kan maklik 'n wêreld voorstel waar die basiseenhede gedefinieer word in terme van G en dit nie bekend is of c rasionaal is in dié eenhede nie. Alleen dié opmerkings hoort duidelik te maak dat 'n berekenbaarheidsbegrip in die algemene natuurwetenskappe veral betekenisvol sou wees indien dit nie tot die telgetalle of rasionale getalle beperk sou wees nie. Deur die afgelope paar dekades is daar dan ook baie werk hieraan gedoen, byvoorbeeld deur die skool van Weihrauch en Brattka.[4] In hierdie bydrae word 'n heeltemal elementêre benadering gevolg om die beginselprobleme by berekenbaarheid oor, byvoorbeeld die reële getalle $\mathbb{R}$, uit die lig.

2. BEREKENINGSTRUKTURE

Ons begin deur nodige (maar nie noodwendig voldoende) voorwaardes te stel waaraan 'n stel funksies wat as *berekenbaar* beskou word, moet voldoen. Gestel X is die versameling waarvoor ons die *berekenbare* funksies wil definieer. Ons wil 'n versameling $\mathscr{F}$ bestaande uit funksies $f :\subseteq X^n \to X^m$ van ('n deelversameling van) X^n na X^m definieer wat aan sekere intuïtiewe vereistes voldoen. Dié vereistes sluit in dat $\mathscr{F}$ geslote moet wees onder samestelling van funksies met 'n versoenbare aantal argumente, dat funksies koördinaatsgewys berekenbaar moet wees (in die geval van funksies met waardes in X^m waar $m \geq 2$), en dies meer. Natuurlik mag die funksies in $\mathscr{F}$ parsieel gedefinieerde funksies wees, dit wil sê $f(x_1,\ldots,x_n)$ mag ongedefinieer wees vir sommige $(x_1,\ldots,x_n) \in X^n$.

Definisie 1. *Ons noem $\mathscr{F}$ 'n* berekeningstruktuur *oor X mits*

$$\mathscr{F} = \bigcup_{n,m\geq 1} F_{n,m}$$

waar $F_{n,m} \subseteq \{f \mid f :\subseteq X^n \to X^m\}$ en voorts

(i) $g \in F_{n,m}$ én $h \in F_{m,\ell}$ impliseer dat $h \circ g \in F_{n,\ell}$ m.a.w. gewone samestelling van funksies toegelaat word;

(ii) $m \geq 2$ én $g \in F_{n,m}$ impliseer dat $h \in F_{n,m-1}$ waar

$$h : (x_1,\ldots,x_n) \mapsto (y_1,\ldots,y_{m-1}) \quad \textit{mits} \quad g : (x_1,\ldots,x_n) \mapsto (y_1,\ldots,y_{m-1},z)$$

vir die een of ander z, m.a.w. waar sekere afvoere maar geïgnoreer mag word;

(iii) $g \in F_{n,m}$ én $h \in F_{n,k}$ impliseer dat v $inF_{n,m+k}$ is waar

$$\begin{aligned} v : (x_1,\ldots,x_n) \mapsto (y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_k) \quad \textit{mits} \quad & g : (x_1,\ldots,x_n) \mapsto (y_1,\ldots,y_m,) \\ \textit{en} \quad & h : (x_1,\ldots,x_n) \mapsto (z_1,\ldots,z_k) \end{aligned}$$

m.a.w. die afvoer van funksies saamgevoeg kan word; en

(iv) die identiteitsfunksies almal tot $\mathscr{F}$ behoort.

Die vereiste (iv) is oënskynlik die moeilikste om te regverdig aangesien al die ander vereistes maklik inskakel by enige masjien-beskouing van berekenbaarheid. Met berekening oor $\mathbb{N}$ is dit duidelik dat (iv) geld omdat die voorstelling van veeltalle telgetalle eenvoudig is. Indien die onderliggende versameling X meer kompleks is, is dit nie heeltemal so duidelik waarom 'n natuurlike berekenbaarheidsbegrip noodwendig die identiteitsfunksies as berekenbaar moet beskou nie. Aan die ander kant, indien enige één eenveranderlike funksie $f : X \to X$ tot $\mathscr{F}$ sou behoort en ook 'n berekenbare inverse (in $\mathscr{F}$) sou hê, dan – as gevolg van (i–iv) – sou alle, ook meerveranderlike, identiteitsfunksies tot $\mathscr{F}$ moet behoort.

Voorbeeld 1. *Die volgende is almal, volgens die definisie hierbo, berekeningstrukture:*

- *die versameling Turing-berekenbare funksies $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$;*
- *die versameling van alle polinoomfunksies $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; en*
- *die versameling van alle parsieel gedefinieerde kontinue funksies $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

Die laasgenoemde struktuur in dié voorbeeld is baie, baie groot en wys uit dat hierdie definisie van 'n berekeningstruktuur nie baie beperkend is nie. Hierdie, moontlik oordrewe, liberalisme het ten doel om die bespreking so algemeen as moontlik te hou. Soos ons in die volgende afdeling sal sien, word strukture soos die laasgenoemde deur verdere redelikheidsaannames uitgesluit. Die definisie bepaal egter reeds dat daar onbeperkte hulpbronne beskikbaar moet wees in die berekeningstruktuur, behalwe wanneer X eindig is of die berekeningstruktuur besonder klein is.

3. BEREKENINGSTRUKTURE MET 'N UNIVERSELE ELEMENT

Berekeningsuniversaliteit is 'n begrip wat die hele teorie en praktyk van die rekenaarwetenskap onderlê.[5] Sonder universaliteit kan daar geen programmeringsbegrip wees nie want elke probleem sal 'n pasgemaakte rekenmasjien vereis. Die bestaan van 'n universele masjien in 'n klas (byvoorbeeld 'n universele Turing-masjien), en die ekwivalensie van alle universele masjiene in 'n klas, maak dit ook moontlik om 'n teorie van berekeningskompleksiteit te ontwikkel. Dit is heeltemal voor-die-hand-liggend dat 'n universele element vir 'n berekeningstruktuur $\mathscr{F}$ oor X self ook tot $\mathscr{F}$ moet behoort. Die elemente van $\mathscr{F}$ is egter funksies met 'n spesifieke aantal parameters/invoere en 'n spesifieke aantal afvoere. Indien 'n enkele element u van $\mathscr{F}$ as universeel beskou gaan word, dan moet dié u ook funksies met meerdere veranderlikes en meer afvoere kan voorstel. Die normale wyse waarop 'n mens dít verseker, is om te vereis dat $\mathscr{F}$ die *paarkoderingseienskap* het.

Definisie 2. *'n Berekeningstruktuur $\mathscr{F}$ oor X het die* paarkoderingseienskap *mits daar 'n bijektiewe $h \in F_{2,1}$ wat op die hele X^2 gedefinieer is, bestaan met $h^{-1} \in F_{1,2}$.*

Dit volg dan onmiddelik uit die definisie van 'n berekeningstruktuur dat daar vir elke $n \geq 2$ 'n injektiewe funksie $h_n \in F_{n,1}$ bestaan met inverse $h_n^{-1} \in F_{1,n}$. Trouens, hierdie stap is die enigste plek in dié uiteensetting waar (i–iv) wel gebruik word! Met behulp van die h_n kan ons nou universaliteit vir $\mathscr{F}$ definieer.

Definisie 3. *'n Funksie $u \in F_{2,1}$ word* universeel *vir 'n berekeningstruktuur $\mathscr{F}$ oor X genoem mits daar vir elke $f \in \mathscr{F}$ 'n element x_f (glad nie noodwendig uniek nie) van X bestaan, só dat*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = h_m^{-1}\left(u\left(x_f, h_n(x_1,\ldots,x_n)\right)\right)$$

wanneer $f \in F_{n,m}$. In die vergelyking word, natuurlik, bedoel dat die linkerkant gedefinieer is as en slegs as die regterkant gedefinieer is.

In berekening oor die telgetalle $\mathbb{N}$ is 'n universele funksie u een wat bereken word deur 'n universele Turing-masjien met twee invoerbande en een afvoerband. Die benadering in hierdie bydrae beperk die kodering van die funksies (deur die spesiale invoer x_f) nie tot die natuurlike getalle, soos dikwels die gebruik is, nie. Dit word so gedoen om die benadering so algemeen as moontlik te beskou, o.a. met die gedagte om kwantumberekening[6] binne dié raamwerk in 'n veralgemeende sin te kan beskou.

4. TOPOLOGIESE VEREISTES VIR BEREKENING

Die primêre doel van die topologie is om 'n begrip van *nabyheid* te definieer, sonder om 'n afstandsmaat te gebruik. Die eksakte betekenis van *'n topologie op X* is 'n familie van deelversamelings van X wat *oop* genoem word en wat sekere aksiomas bevredig, soos om geslote te wees onder eindige snydings en arbitrêre verenigings. Twee punte van X is *naby* aan mekaar, grof benaderd uitgedruk, indien hulle in baie oop versamelings voorkom waarin ander punte nie is nie. 'n Funksie word kontinu genoem indien dit nie punte wat naby aan mekaar is afbeeld op punte wat ver van mekaar af is nie, d.w.s. wanneer die inverse beeld van 'n oop versameling in die beeldruimte ook 'n oop versameling in die definisieruimte is. Dit is dan nou duidelik waarom ons die sogenaamd berekenbare funksies in $\mathscr{F}$ ook as kontinu wil beskou: enige klein fout in die invoer moet lei tot 'n klein fout in die afvoer.

Gestel nou X het 'n topologie τ. Dit is slegs sinvol om die topologie binne die konteks van 'n berekeningstruktuur $\mathscr{F}$ te bespreek indien elke $f \in \mathscr{F}$ ook kontinu is in die topologieë wat deur τ op die produkruimtes X^n en X^m geïnduseer word.

Definisie 4. *Ons noem $(X, \mathscr{F}, \tau)$ 'n* topologiese berekeningstruktuur *indien $\mathscr{F}$ 'n berekeningstruktuur oor X is waarvoor al die funksies in $\mathscr{F}$ kontinu is m.b.t. τ en die topologieë deur τ geïnduseer op die produkruimtes X^n, $n \geq 2$.*

Indien τ die triviale topologie is waarin alle deelversamelings van X oop is, dan is $(X, \mathscr{F}, \tau)$ 'n topologiese berekeningstruktuur vir elke berekeningstruktuur $\mathscr{F}$. Dít is gewoonlik die geval wanneer ons kyk na $X = \mathbb{N}$ maar topologiese berekeningstrukture moet nie-triviaal wees indien ons oor meer komplekse topologiese ruimtes, soos byvoorbeeld $\mathbb{R}$ wil bereken. Die hoofresultaat wat hier uitgewys word is dat die sogenaamde *speldprikeienskap* dit uiters moeilik maak om berekening oor $\mathbb{R}$ en soortgelyke ruimtes te doen.

Definisie 5. *'n Topologie τ op X het die* speldprikeienskap *indien*

- *elke oop versameling $U \in \tau$ met $x \in U$, só is dat $U \setminus \{x\}$ geskryf kan word as die vereniging van twee nie-leë disjunkte oop versamelings; maar*
- *daar vir elke $y \in V \in \tau \times \tau$ daar 'n $W \in \tau \times \tau$ met $y \in W \subseteq V$ bestaan, só dat W nie geskryf kan word as die vereniging van twee nie-leë disjunkte oop versamelings in $\tau \times \tau$ nie.*

Met $\tau \times \tau$ bedoel ons hier natuurlik die produktopologie en nie die versamelingteoretiese produk van τ met sigself nie.

Die *speldprikeienskap* beteken maar net dat oop omgewings van elke element x van X in twee gedeel kan word deur die element te verwyder maar dat dit nie noodwendig moontlik is om in $X \times X$ oop omgewings van 'n punt te verdeel deur slegs die punt te verwyder nie. Natuurlik het $\mathbb{R}$, met die gewone topologie, die speldprikeienskap. Ons bewys nou die volgende bewering.

Stelling 1. *Gestel $(X, \mathscr{F}, \tau)$ is 'n topologiese berekeningstruktuur en τ het die speldprikeienskap. Dan het $\mathscr{F}$ nie die paarkoderingseienskap nie.*

Bewys. Veronderstel die teendeel – dat daar 'n bijektiewe paarkodering $h \in F_{2,1}$, wat op die hele X^2 gedefinieer is, bestaan met $h^{-1} \in F_{1,2}$. Kies nou 'n $Y \in \tau$ en $x \in Y \subseteq X$ en beskou $V = h^{-1}(Y)$, wat 'n oop versameling is aangesien h kontinu is. Stel $y = h^{-1}(x) \in V \subseteq X^2$.

Volgens die speldprikeienskap bestaan daar dan 'n $W \supseteq V$ met $y \in W$ wat nie as die disjunkte vereniging van nie-leë oop versamelings geskryf kan word nie. Omdat h^{-1} kontinu is, m.a.w. h oop versamelings in X^2 op oop versamelings in X afbeeld, is $U = h(W) \subseteq Y$ nou 'n oop omgewing van x en volgens die speldprikeienskap bestaan daar disjunkte $U_1, U_2 \in \tau$ sodat

$$U \setminus \{x\} = U_1 \cup U_2.$$

Omdat h kontinu en bijektief is, is $W_1 = h^{-1}(U_1)$ en $W_2 = h^{-1}(U_2)$ beide oop en nie-leeg en voorts moet

$$W \setminus \{y\} = W_1 \cup W_2$$

wat egter die speldprikeienskap weerspreek en derhalwe moet ons die aanname – dat daar so 'n h bestaan – verwerp. $\square$

Dié stelling is matig interessant omdat baie topologiese ruimtes, waaroor ons graag sou wou bereken, wel die speldprikeienskap het. Die afwesigheid van die paarkoderingseienskap beteken dat ons nie op die gebruiklike wyse in dié topologiese berekeningsruimtes 'n universele funksie kan definieer nie.

Voorbeeld 2. *Elke digte lineêre ordening het die speldprikeienskap en leen sigself derhalwe nie tot die gebruiklike definisie van berekeningsuniversaliteit nie.*

Die kwessie wat in hierdie afdeling bespreek is, is eintlik 'n spesiale geval van die vraag: wanneer is X^2, as topologiese ruimte, ekwivalent aan X? Brouwer het in 1911 reeds sy bewys[1] dat R^n en R^m slegs topologies ekwivalent is wanneer $n = m$, laat verskyn. Sover aan die outeur bekend, is dié vraag nog oop hoewel daar reeds vir 'n hele aantal spesiale tipes ruimtes (byvoorbeeld volledige skeibare metriese ruimtes) aangetoon kon word dat die veralgemeende vlak X^2 nie ekwivalent is aan die veralgemeende lyn X nie. 'n Onlangse bydrae[2] van Tsereteli en Zambakhidze sluit 'n goeie oorsig oor dié resultate in.

5. SAMEVATTING

In hierdie bydrae is gepoog om 'n algemene raamwerk te beskryf waarin berekenbaarheid vir 'n willekeurige topologiese ruimte X gedefinieer kan word. Die elemente van X word in dié benadering beskou as die primitiewe voorwerpe – ook vir die kodering van funksies – en daar word, tensy $X = \mathbb{N}$, nie direk van die telgetalle gebruik gemaak nie. Die telgetalle word, terloops, egter as 't ware by die agterdeur ingesmokkel deur middel van die begrip *topologie* aangesien dié begrip ruim gebruik maak van die telgetalle in die sin dat elke vereniging van oop versamelings wat deur ’n telgetal (beskou as eindige ordinaal) geïndekseer kan word, weer oop moet wees. Dít bepaal die definisie van kontinuïteit van ’n funksie en indien ons – vir redes wat kortliks uiteengesit is – elke berekenbare funksie as kontinu wil beskou dan is die telgetalle se rol onmoontlik om te misken.

Die voorwaardes in die definisie van ’n topologiese berekeningsruimte wat gebruik word is nodig maar ver van voldoende vir die meeste doeleindes. Desnieteenstaande is daar ’n eenvoudige bewys wat aantoon dat topologiese ruimtes met die speldprikeienskap nie die paarkoderingseienskap kan hê nie, en derhalwe nie ’n definisie van berekeningsuniversaliteit – wat ooreenstem met dié begrip vir die telgetalle – toelaat nie.

VERWYSINGS

1 Brouwer, L.E.J. (1911). Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. *Mathematische Annalen*, 70(2), 161–165.

2 Tsereteli, I., & Zambakhidze, L. (2004). Some aspects of the theory of dimension of completely regular spaces. *Topology and its Applications*, 143(1-3), 27-48.

3 Manin, Y. I. (1977). *A course in mathematical logic*. New York: Springer-Verlag.

4 Brattka, V., & Presser, G. (2003). Computability on subsets of metric spaces. *Theoretical Computer Science*, 305(1–3), 43–76.

5 Potgieter, P. H. (2006). Zeno machines and hypercomputation. *Theoretical Computer Science*, 358(1), 23–33.

6 Heidema, J., Fouché, W.L., & Potgieter, P.H. (2005). Kwantumberekening. *SA Tydskrif vir Natuurwetenskap en Tegnologie*, 24(3), 60-83.

7 Hurewicz, W., & Wallman, H. (1941). Dimension Theory. Princeton, N. J.: Princeton University Press.