

Leer deur probleemoplossing in wiskundeonderwys

Learning via problem solving in mathematics education

PIET HUMAN

Direkteur, Ukuqonda Institute

E-pos: humanp@yebo.co.za



Piet Human

PIET HUMAN is in 1944 in Middelburg (Kaap) gebore, het op 'n plaas naby Reitz in die Vrystaat grootgeword en op Tweeling skoolgegaan. Hy het aan die universiteite van Stellenbosch (BSc en DEd) en Pretoria (BEd en MEd) studeer. In die tydperk 1966-1975 werk hy afwisselend as industriële skeikundige, wiskunde-onderwyser en onderwysnavorsers. Vanaf 1975 tot 1995 doseer hy wiskunde-didaktiek aan die Universiteit van Stellenbosch. In hierdie tydperk is hy medeskrywer van 'n verskeidenheid skoolhandboeke (wiskunde), en loods hy saam met sy kollegas Hanli Murray en Alwyn Olivier die probleemgesentreerde benadering tot rekenondewys in primêre skole van die vier provinsiale onderwysdepartemente. Sedert 1995 werk hy as vryskut wiskunde-didaktikus. In 2005 word hy uitvoerende hoof van die Ukuqonda Instituut, 'n nie-regeringsorganisasie toegespits op die bevordering van wiskunde en wetenskap-onderwys van gehalte.

PIET HUMAN was born in Middelburg (Cape) in 1944, grew up on a farm near Reitz in the Free State and went to school in Tweeling. He studied at the universities of Stellenbosch (BSc and DEd) and Pretoria (BEd and MEd). In the period 1966-1975 he was employed as an industrial chemist, a mathematics teacher and educational researcher. From 1975 to 1995 he taught mathematics education at the University of Stellenbosch. During this time he co-authored a number of school mathematics textbooks. He worked in close collaboration with colleagues Hanli Murray and Alwyn Olivier, and together they piloted a problem-centred program of teaching arithmetic in primary schools of the then four provincial departments of education. Since 1995 he has worked as a freelance mathematics educator. In 2005 he became the chief executive officer of the Ukuqonda Institute, a non-governmental organization dedicated to promote excellence in mathematics and physical science education

ABSTRACT

Learning via problem solving in mathematics education

Three forms of mathematics education at school level are distinguished:

- *direct expository teaching with an emphasis on procedures, with the expectation that learners will at some later stage make logical and functional sense of what they have learnt and practised (the prevalent form),*
- *mathematically rigorous teaching in terms of fundamental mathematical concepts, as in the so-called "modern mathematics" programmes of the sixties,*
- *teaching and learning in the context of engaging with meaningful problems and focused both on learning to become good problem solvers (teaching for problem solving) and utilising problems as vehicles for the development of mathematical knowledge and proficiency by learners (problem-centred learning), in conjunction with substantial teacher-led social interaction and mathematical discourse in classrooms.*

Direct expository teaching of mathematical procedures dominated in school systems after World War II, and was augmented by the “modern mathematics” movement in the period 1960-1970. The latter was experienced as a major failure, and was soon abandoned. Persistent poor outcomes of direct expository procedural teaching of mathematics for the majority of learners, as are still being experienced in South Africa, triggered a world-wide movement promoting teaching mathematics for and via problem solving in the seventies and eighties of the previous century. This movement took the form of a variety of curriculum experiments in which problem solving was the dominant classroom activity, mainly in the USA, Netherlands, France and South Africa. While initially focusing on basic arithmetic (computation with whole numbers) and elementary calculus, the problem-solving movement started to address other mathematical topics (for example, elementary statistics, algebra, differential equations) around the turn of the century. The movement also spread rapidly to other countries, including Japan, Singapore and Australia.

Parallel with the problem-solving movement, over the last twenty years, mathematics educators around the world started increasingly to appreciate the role of social interaction and mathematical discourse in classrooms, and to take into consideration the influence of the social, socio-mathematical and mathematical norms established in classrooms. This shift away from an emphasis on individualised instruction towards classroom practices characterised by rich and focused social interaction orchestrated by the teacher, became the second element, next to problem-solving, of what is now known as the “reform agenda”.

Learning and teaching by means of problem-solving in a socially-interactive classroom, with a strong demand for conceptual understanding, is radically different from traditional expository teaching. However, contrary to commonly-held misunderstandings, it requires substantial teacher involvement. It also requires teachers to assume a much higher level of responsibility for the extent and quality of learning than that which teachers tended to assume traditionally.

Over the last 10 years, teaching for and via problem solving has become entrenched in the national mathematics curriculum statements of many countries, and programs have been launched to induce and support teachers to implement it. Actual implementation of the “reform agenda” in classrooms is, however, still limited. The limited implementation is ascribed to a number of factors, including the failure of assessment practices to accommodate problem solving and higher levels of understanding that may be facilitated by teaching via problem solving, lack of clarity about what teaching for and via problem solving may actually mean in practice, and limited mathematical expertise of teachers. Some leading mathematics educators (for example, Schoenfeld, Stigler and Hiebert) believe that the reform agenda specifies classroom practices that are fundamentally foreign to culturally embedded pedagogical traditions, and hence that adoption of the reform agenda will of necessity be slow and will require more substantial professional development and support programs than those currently provided to teachers in most countries. Notwithstanding the challenges posed by implementation, the movement towards infusing mathematics education with a pronounced emphasis on problem solving both as an outcome and as a vehicle for learning seems to be unabated. Substantial work on the development of more effective means for professional development and support of teachers is currently being done.

KEY WORDS: problem solving, problem-centred, reform agenda, socially-interactive, standards-based, conceptual

TREFWOORDE: probleemoplossing, probleemgesentreerd, vernuwingsagenda, sosiaal-interaktief, standaardgebaseerde, konseptuele

OPSOMMING

Drie vorme van wiskundeonderwys word onderskei: tradisionele onderrig deur mededeling, demonstrasie en inoefening van prosedures; wiskundig strenge deduktiewe onderrig (die sogenaamde “moderne wiskunde beweging”); en probleemgesentreerde wiskundeonderwys (onderrig in die konteks van, vir en deur probleemoplossing).

Na die mislukking van die “moderne wiskunde”-beweging van die sestigerjare, en die toenemende frustrasie met die swak uitkomst van tradisionele onderrig, het probleemgesentreerde wiskundeonderwys in samehang met sosiaal-interaktiewe klaskamerpraktyke (die sogenaamde vernuwingsagenda (“reform agenda”)) na vore getree as ’n broodnodige en (volgens huidige insigte) enigste alternatief vir proseduregerigte onderrig deur mededeling, demonstrasie en inoefening. Sedert die laat sewentigerjare is talle suksesvolle eksperimentele onderrigprogramme, wat op probleemoplossing as dominante klaskamerpraktyk steun, van stapel gestuur. Sedert die eeuwending word die vernuwingsagenda in die nasionale kurrikulumdokumente vir wiskunde van baie lande gespesifiseer.

Probleemgesentreerde, sosiaal-interaktiewe wiskundeonderwys stel aansienlik hoër eise aan leerkragte se wiskundige kennis en hul sosiale, diskursiewe en pedagogiese vaardighede as onderrig deur mededeling en demonstrasie. Suksesvolle implementering van die vernuwingsagenda, ook in Suid-Afrika, is dus sterk afhanklik van doeltreffende indiensopleiding en professionele ondersteuning van leerkragte.

INLEIDING

Die idee om aan probleemoplossing ’n sentrale plek in die leer en onderrig van wiskunde te gee, speel oor die afgelope 50 jaar ’n oorheersende rol in vernuwende denke oor wiskundeonderwys. Dat ’n klem op probleemoplossing tot goeie leeruitkomst kan lei, word gereeld bevestig in programme wat op ’n beperkte skaal geïmplementeer word.¹ Verskeie lande, soos Singapoer, Japan en Finland, waarin probleemoplossing prominensie in die kurrikulum geniet, presteer gereeld besonder goed in internasionale vergelykende ondersoeke na prestasie in wiskunde.²

Tog is die leidende Nederlandse leersielkundige Van Oers ietwat optimisties wanneer hy skryf:

Over the past fifty years the classroom approach to mathematics has changed radically from a drill-and-practice affair to a more insight based problem oriented approach. (Van Oers, 2001: 59)

Alhoewel sy stelling sekerlik die visie van die oorgrote meerderheid professionele wiskunde-didaktici in die wêreld verteenwoordig, kom daar waarskynlik in baie van die wêreld se wiskundeklaskamers nog nie veel van probleemoplossing en begripsbevordering in wiskundeonderwys tereg nie. Wat wel waar is, is dat probleemoplossing in die wiskunde-urrikula van baie lande – insluitend Suid-Afrika – sterk beklemtoon word, en dat volgehoue pogings om dit in onderwyspraktyke te vestig dwarsoor die wêreld aangewend word.

In hierdie artikel kyk ons kortliks na verskillende maniere waarop probleemoplossing in wiskundeonderwys ter sprake kan kom, die mate waartoe dit tans in onderwyspraktyke gerealiseer word, en moontlike struikelblokke in dié verband. Die oorsig geskied teen die agtergrond van die onderliggende vraag hoe haalbaar dit is om ’n daadwerklike klem op probleemoplossing in Suid-Afrikaanse klaskamers te vestig.

¹ Vergelyk byvoorbeeld Schoenfeld (2007a:547); Senk & Thompson (2003); Taylor *et al*, 1995; Moseley & Brenner (2009); Cotic & Zuljan (2009) en Ridlon, 2009.

² Vergelyk Huat & Huat, 2001; Stiegler & Hiebert (1999) en Pehkonen (2008).

DIE MODERNE KLEM OP PROBLEEMOPLOSSING

Die moderne klem op probleemoplossing in wiskundeonderwys behels iets anders as die twee vorme waarin probleemoplossing reeds eeue lank in wiskundeonderwys voorkom, naamlik probleme as oefeninge in die uitvoer van wiskundige prosedures (die sogenaamde “woordprobleme” of “storiesomme”, vergelyk Verschaffel *et al*, 2000) en as uitdagings vir knapper leerlinge (soos in olimpiades). Enersyds val die moderne klem op *onderrig vir probleemoplossing*, dit wil sê onderrig wat daarop gerig is om leerlinge se bevoegdheid om (vir hulle nuwe) probleme suksesvol aan te pak te bevorder. Andersyds val die moderne klem op *leer deur probleemoplossing*, dit wil sê die benutting van geskikte probleme as kontekste en instrumente vir die uitbou van leerlinge se wiskundige kennis en bevoegdheid, hul perspektiewe op waaroor wiskunde gaan en wat wiskundige aktiwiteit behels, en die ontplooiing van hul eie identiteite as mense wat onder andere wiskundig handel (Boaler & Greeno, 2000; Cobb *et al*, 2009).

Alan Schoenfeld van die Universiteit van Berkeley, ’n leidende figuur in die beweging vir probleemoplossing, meen dat die klem op probleemoplossing voortgestu is deur reaksie teen die swak uitkomst en eng resepmatigheid van die “terug na die basiese” beweging wat op die sogenaamde “moderne wiskunde” beweging van die sestigerjare van die vorige eeu gevolg het:

The problem solving movement around the world may be seen in part as a rebellion against rote, algorithmic mathematics – an attempt to get beyond drill-and-practice in algorithms and, at its best, an attempt to introduce students to significant aspects of mathematical thinking. (Schoenfeld 1985:7-8)³

Wagenschein (1956) skryf swak leeruitkomst tydens die heropbou van Wes-Duitsland in die jare na die Tweede Wêreldoorlog toe aan *kontekslose* wiskundeonderwys, waarin wiskundige prosedures (byvoorbeeld vir berekeninge met telgetalle) voorskriftelik onderrig word, sonder enige verwysing na werklike situasies waarin die betekenis van die bewerkings gedemonstreer word, en wat leerlinge se eie idees na vore kan bring. Wagenschein stel met sy idee van “eksemplariese leer” voor dat wiskundeonderwys moet fokus op die aanpak van ’n aantal goed-selekteerde probleme:

[.] . . dissecting and understanding one problem thoroughly rather than superficially answering a large number of questions using rules and formulas that are memorized and soon forgotten. Wagenschein was furthermore convinced that the ideas of the children should influence the direction the teaching takes, and that a ‘method of learning that does not respect a child’s own thoughts has no heart’. (*Ecole d’Humanité*, webblad)

Wagenschein (1956:124, soos vertaal in Westbury *et al*, 2000) stel dit self soos volg:

Getting into a subject means plunging in – finding a relatively complex problem about which the students have no previous knowledge, a problem that will challenge them and elicit their spontaneous engagement.

Soortgelyke idees is reeds vroeg in die 20ste eeu deur leidende leersielkundiges geopper. Beide Piaget en Dewey, byvoorbeeld, oordeel dat problematiese ervarings ’n kritieke voorwaarde vir beduidende leer is. Savery en Duffy (1995:33) stel dit soos volg:

³ Vergelyk ook Kamii (1988); Carraher & Schliemann (1988); Cockroft (1982), vir inligting oor die nadelige effekte van tradisionele wiskundeonderwys.

In Dewey's terms it is the 'problematic' that leads to and is the organizer for learning. For Piaget it is the need for accommodation when current experience cannot be assimilated in existing schemes.

ONDERRIG VIR PROBLEEMOPLOSSING

Burkhardt en Schoenfeldt (1984) beskryf probleemoplossing soos volg:

To us, the essence of problem solving is that the solver faces an unfamiliar task – one for which they could not be reasonably expected to know immediately a path to the solution.

Dit gaan dus oor nie-roetine opgawes, dit wil sê opgawes waarvoor die probleemoplosser 'n mate van vindingrykheid en ondernemingsgees aan die dag moet lê.

Gedurende die sestiger- en sewentigerjare het 'n fokus op onderrig vir probleemoplossing na vore getree. Polya se raamwerk van stappe (Polya, 1945) wat deur goeie probleemoplossers gevolg word, was 'n belangrike dryfkrag hiervoor:

1. Verstaan die probleem.
2. Maak 'n plan
3. Voer die plan uit
4. Kyk krities terug en evalueer jou antwoord deur anders te dink as in jou plan.

Probleemoplossing is uiteraard meer kompleks as dit. Hierdie eenvoudige raamwerk verskaf egter reeds 'n lens waarmee aspekte van die huidige stand van probleemoplossing in die Suid-Afrikaanse onderwyspraktyk beoordeel kan word. Die skrywer en sy kollegas werk op 'n gereelde basis met wiskundeleerkrigte en leerders in diep landelike skole (alle skoolvlakke) dwarsoor Suid-Afrika, asook in 'n jaarlange voltydse brugprogram met studente wat pas Graad 12 met goeie simbole (C of beter) in wiskunde geslaag het. Ons onderrig gereeld vir probleemoplossing en maak intensief van leer deur probleemoplossing gebruik. Ons ervaar dikwels dat leerkrigte en leerders, wanneer hulle 'n probleem aanpak, blykbaar uit gewoonte nie die eerste en laaste stappe in Polya se raamwerk uitvoer nie. Dit dui daarop dat daar tans nie veel van effektiewe onderrig vir probleemoplossing in die Suid-Afrikaanse onderwyspraktyk ter sprake is nie. Aangesien Polya se eerste stap, naamlik om die probleem as sodanig ernstig op te neem, 'n kritieke voorwaarde vir effektiewe leer deur probleemoplossing is, kan laasgenoemde tans (minstens op hoërskoolvlak) ook nie werklik plaasvind nie.

Ons stel byvoorbeeld gereeld die volgende probleem aan leerkrigte (alle skoolvlakke) en hoërskoolleerlinge:

Miriam bak gereeld appelters volgens 'n resep wat sy by haar oma gekry het. Die resep vereis 'n driekwart appel vir een appelters. Op 'n dag moet Miriam appelters vir die kerkbasaar bak, maar sy het net 20 appels. Hoeveel heel appelters kan sy bak, as sy streng by die resep hou?

'n Groot persentasie leerkrigte en die oorgrote meerderheid leerlinge gee baie vinnig die antwoord 15, deur driekwart van 20 te bereken, en doen nie self die moeite om die antwoord krities teen die probleemstelling te evalueer nie. Dit is asof hulle bloot 'n impulsiewe refleksaksie ("knee-jerk") uitvoer (vergelyk Lester in Silver *et al*, 1984: 47 en 42-43).

Wanneer ons leerlinge vra om hulle oplossings vir 'n probleem te evalueer (Polya se stap 4), gryp hulle tipies na hul sakrekenaars om die berekeninge wat hulle gedoen het te kontroleer. As hulle vind dat die berekening foutief was, korregeer hulle dit, en as hulle vind dat hul berekening

korrek was, konstateer hulle dat die antwoord reg is. Dit wil voorkom asof dit vir leerlinge dikwels nie daarvoor gaan om 'n probleem op te los nie, dit is asof hulle 'n gestelde probleem bloot vertolk as 'n opdrag om wiskundige prosedures wat hulle ken uit te voer. Hulle probeer dus nie eers om die probleem te verstaan nie (Polya se eerste stap), en hulle kan gevolglik nie die antwoord wat hulle gee teen die probleem toets nie (Polya se vierde stap).

Dit is te betwyfel of dit veel sal help om aan leerlinge met hierdie ingesteldheid bloot onderrig oor probleemoplossing te gee, byvoorbeeld deur Polya se stappe of soortgelyke riglyne aan hulle te onderrig. Die uitdaging is moontlik dieper geleë, naamlik in leerlinge se verworwe perspektiewe op wat dit *beteken* om wiskunde te doen, en hulle verbandhoudende wiskundige gewoontes. Dit is asof baie leerlinge wiskunde bloot sien as die uitvoer van aangeleerde prosedures, en nie as die produksie van sinvolle oplossings vir sinvolle probleme (“binne” of “buite” wiskunde) nie. Indien dit die geval is, is daar 'n goeie saak voor uit te maak om die aanleer van wiskundige prosedures van meet af binne die aanpak van probleme te plaas. Dit sal neerkom op leer deur probleme aan te pak en daarmee te worstel soos Wagenschein (*vide supra*) voorgestel het, in plaas van die huidige oorheersende praktyk om konsekwent eers, sonder verwysing na of aanpak van probleem-situasies, pasklaar prosedures aan leerlinge te onderrig (onderrig deur mededeling).

LEER DEUR PROBLEEMOPLOSSING

Wiskunde-onderwys geskied tradisioneel (behalwe by wyse van uitsondering) nie deur probleemoplossing nie. Die gevestigde praktyk in klaskamers behels meestal dat leerlinge deur middel van 'n mondelinge of skriftelike mededeling van 'n leerkrag of skrywer kennis maak met nuwe begrippe, prosedures, resultate en notasiewyses, in pasklaar, afgeronde vorm, en die meegedeelde kennis dan op 'n verskeidenheid maniere, byvoorbeeld nadenke daarvoor en inoefening van roetine-toepassings, probeer toe-eien (vergelyk Burkhardt, 1985:17).

Schreuder en Lester (1989: 33) beskryf onderrig deur probleemoplossing soos volg:

The teaching of a mathematical topic begins with a problem situation that embodies key aspects of the topic, and mathematical techniques are developed as reasonable responses to reasonable problems.

In die *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000:181) word dit soos volg beskryf:

Problem solving ... can serve as a vehicle for learning new mathematical ideas and skills... A problem-centered approach to teaching mathematics uses interesting and well-selected problems to launch mathematical lessons and engage students. In this way, new ideas, techniques, and mathematical relationships emerge and become the focus of discussion. Good problems can inspire the exploration of important mathematical ideas, nurture persistence, and reinforce the need to understand and use various strategies, mathematical properties, and relationships.

Met 'n “probleem” word in hierdie konteks 'n situasie bedoel waarvoor sekere inligting bekend is terwyl ander inligting gesoek word, soos in die volgende voorbeeld gedemonstreer:

'n Mens kan 'n stel data hê oor die watervlak in 'n maatsilinder nadat water vir bepaalde tydperke deur 'n hewel uit 'n houer na die maatsilinder gevloei het, sonder dat die water in die houer intussen aangevul word. Nou kan 'n mens daarin belangstel om te beskryf hoe vinnig die water deur die hewel vloei.

Wanneer probleme soos bostaande as vertrekpunte vir die daarstelling van nuwe leerlingkennis in klaskamers gebruik word, kom begrippe (in hierdie geval die begrip tempo van verandering in 'n situasie waar die tempo kontinu varieer, en die begrip differensiasie van 'n funksie), prosedures, resultate en notasiewyses nie sonder meer in die konvensionele afgeronde uitgewes daarvan tot stand nie. Dit kom veeleer eers in die vorm van dikwels growwe (potensiële) “besprekingsdokumente” tot stand. Leer deur probleemoplossing word gekenmerk deur 'n groot mate van aanvanklike lomtheid, gebrek aan sofistikasie en idiosinkrasie by leerders. Anders as tradisionele onderrig deur mededeling, het onderrig deur probleemoplossing 'n sterk ontwikkelingskarakter, 'n geleidelike ontwikkeling na meerdere sofistikasie (vergelyk Cobb *et al*, 1991 en Simon, 1995). Alhoewel kennisproduksies deur leerlinge 'n beduidende en kritieke rol speel, het die leerkrag 'n kritieke en uitdagende taak om leerders te lei om hul idees te verfyn, deur kritiese onderlinge gesprekke en die aanpak van opvolgprobleme, asook deur hulle by geleentheid oor konvensionele wiskundige gebruike in te lig. Onderrig deur probleemoplossing is in wese 'n radikale alternatief vir onderrig deur mededeling. Nogtans speel deskundige mededeling deur die leerkrag 'n daadwerklike rol daarin. Wittmann (1971:245) wys op die uitdaging om 'n doeltreffende balans tussen mededeling en leerlingaktiwiteit in wiskundeonderwys te vind, en om die onderskeie rolle van die twee onderrigvorme uit te klaar, wanneer hy soos volg skryf:

[.] . . the **activity of the student** and **instruction** have to be regarded as complementary factors in the learning process. Both factors are necessary, and they require to be systematically related to one another in such a manner, that progress becomes optimal.⁴

Leerlinge se intellektuele outonomie en ondernemingsgees (“agency”) is beide 'n kritieke voorwaarde vir – en 'n beoogde uitkoms van – leer deur probleemoplossing. Dit vereis dat die leerkrag by die benutting van mededeling van kennis uiters versigtig moet wees om nie die outonomie en ondernemingsgees van die leerlinge te ondermyn nie. Henningsen en Stein (1997: 524) se artikulering van die idee van “scaffolding” is hier ter sprake:

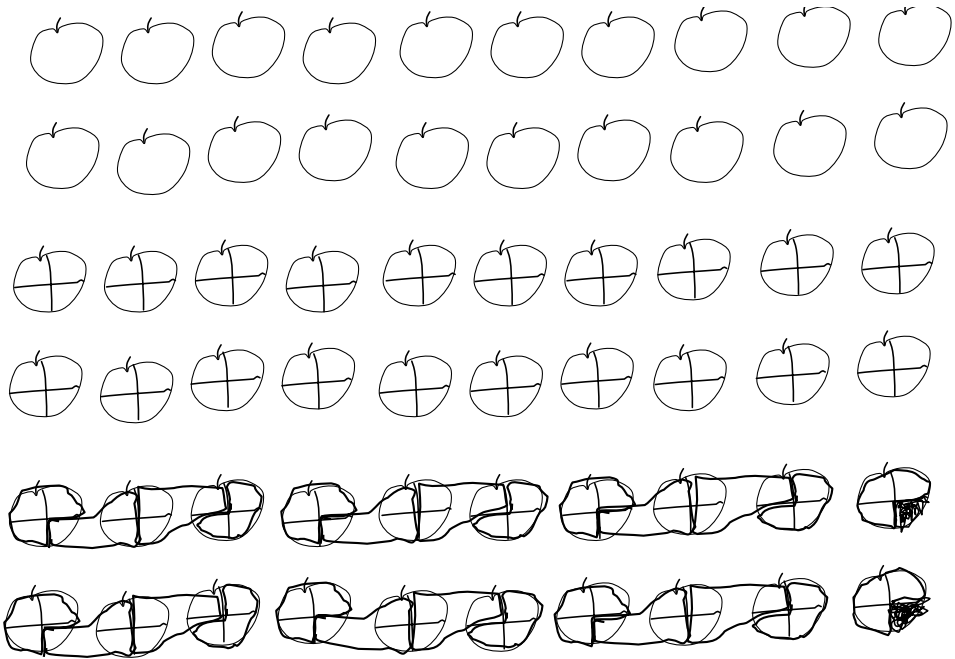
Scaffolding occurs when a student cannot work through a task on his or her own, and a teacher or more capable peer provides assistance that enables the student to complete the task alone, but that does not reduce the overall complexity or cognitive demands of the task.

Dit verskaf aan die skrywer en sy kollegas gereeld groot werkvreugde om die vroeër genoemde probleem oor appels en appeltert aan 'n groep Graad 3 of 4 leerders te stel, hulle vir ongeveer 20 minute daarmee te laat worstel, en dan 'n klaskamergesprek oor hulle gedane werk te lei:

Miriam bak gereeld appeltert volgens 'n resep wat sy by haar ouma gekry het. Die resep vereis 'n driekwart appel vir een appeltert. Op 'n dag moet Miriam appelterte vir die kerkbasaar bak, maar sy het net 20 appels. Hoeveel heel appelterte kan sy bak, as sy streng by die resep hou?

Graad 3 en 4 leerders het tipies nog nooit geleer om 'n breuk te behandel nie. Die meerderheid leerders kry egter iets van waarde reg wanneer hulle die probleem takel. (Die leerkrag moet uiteraard seker maak dat al die leerlinge die situasie en die probleem reg verstaan.) 'n Gewilde strategie is om 20 appels te teken, elke (tekening van) 'n appel rofweg in vier te verdeel, dan drie kwarte op 'n slag af te merk om 'n appeltert aan te dui, en uiteindelik te tel hoeveel appelterte gebak kan word.

⁴ Vergelyk Sfard (1998) vir 'n diepgaande perspektief in hierdie verband.



Wanneer 'n groep leerlinge herhaaldelik soortgelyke probleme aanpak, en hulle individuele werk vergelykend bespreek in groepe, skakel hulle geleidelik oor na minder tydrawende metodes wat dieselfde denke verteenwoordig. Die vooruitgang kan deur die leerkrag aangemoedig word deur aan die leerlinge voor te stel dat hulle sonder die sketse moet probeer klaarkom. Die vooruitgang kan ook aangemoedig word deur probleme te stel waarin daar nie so opsigtelik 'n voorwerk wat geteken en verdeel kan word voorkom nie, byvoorbeeld die volgende probleem: Tafeldoeke wat elk vyf agstes van 'n meter lank is, moet van 'n rol materiaal wat 30 meter lank is, gesny word. Hoeveel tafeldoeke kan gesny word?

Oplossings soos die volgende begin dan voorkom (ter wille van leesvriendelikheid gebruik ons dieselfde probleem in hierdie uiteenstelling – in 'n werklike onderrigverloop sal leerlinge telkens aan 'n ander, dog soortgelyke probleem werk):

Ek sny elke appel in vier kwarte, dan het ek 80 kwarte. Met elke 3 kwarte kan ek 'n appeltert bak.

$3 + 3 \rightarrow 6 + 3 \rightarrow 9 + 3 \rightarrow + 3 \rightarrow 12 + 3 \rightarrow 15 + 3 \rightarrow 18 + 3 \rightarrow 21 + 3 \rightarrow 24 + 3 \rightarrow 27 + 3 \rightarrow$
 $30 + 3 \rightarrow 33 \quad 33 + 3 \rightarrow 36 + 3 \rightarrow 39 + 3 \rightarrow 42 + 3 \rightarrow 45 + 3 \rightarrow 48 + 3 \rightarrow 51 + 3 \rightarrow 54 + 3$
 $\rightarrow 57 + 3 \rightarrow 60 + 3 \rightarrow 63 + 3 \rightarrow 66 + 3 \rightarrow 69 + 3 \rightarrow 72 + 3 \rightarrow 75 + 3 \rightarrow 78 + 3 \rightarrow 81$

Die leerling sal dan die drieë tel om 26 te kry, en weet dat daar twee kwartappels oor is. Let op dat die leerkrag moontlik die gebruik van die pyle sal moet voorstel, anders sal leerlinge gelykaantekens gebruik in 'n ander betekenis as die konvensionele wiskundige betekenis, soos in sommige programmeertale.

Die appeltertprobleem kan natuurlik maklik opgelos word deur die situasie as $20 \div \frac{3}{4}$ te vertolk en dan die konvensionele reël vir deling met 'n breuk (vermenigvuldig met die vermenigvuldiginverse) te gebruik. Leerkrage (en ouers) wat nie raaksien dat die leerlinge goed op pad

is daarna om die probleem as $(20 \times 4) \div 3$ te modelleer nie kan dus ongeduldig raak, en hulle bekommer dat leerlinge nou altyd so omslagtig sal werk. Geduld is egter hier van pas. Die leerlinge is op pad om met die nodige insette van die leerkrag 'n goeie begrip van een betekenis van deling met 'n breuk te ontwikkel, naamlik dat dit daarvoor gaan om vas te stel hoeveel dele van 'n sekere grootte ($\frac{3}{4}$ appel in hierdie geval) daar in 'n sekere totale hoeveelheid (20 appels in hierdie geval) beskikbaar is (die sogenaamde metingsbetekenis van deling, oftewel groepering soos dit in die Suid-Afrikaanse kurrikulumdokumente genoem word). Indien die leerkrag sonder meer vir leerlinge sou wys dat die probleem opgelos kan word deur $(20 \times 4) \div 3$ te bereken, is die risiko groot dat talle leerlinge nie die verband tussen die berekening en die situasie sal raaksien nie.

In die metode hierbo is leerlinge wel deeglik op pad na meer gesofistikeerde prosedures om deling met 'n breuk uit te voer. Hulle vermenigvuldig reeds 20 met 4 as die eerste stap in die berekening van $20 \div \frac{3}{4}$ (alhoewel hulle moontlik nog nie die probleem as $20 \div \frac{3}{4}$ konseptualiseer nie). Indien leerlinge nie self raaksien dat die herhaalde optelling van drieë tot naby 80 eintlik deling ($80 \div 3$) is nie, sou die leerkrag hulle kon uitdaag om die stap vinniger en makliker te probeer doen, en selfs kon voorstel dat dit dieselfde is as wat hulle reeds onder deling verstaan. Sodoende kan leerlinge dan vorder na 'n meer gesofistikeerde metode om probleme van hierdie aard op te los, naamlik $(20 \times 4) \div 3$.

Vir leerlinge wat reeds deling met telgetalle verstaan as die bewerking waardeur 'n mens kan bepaal hoeveel dele van dieselfde gelyke grootte daar in 'n gegewe hoeveelheid beskikbaar is, kan die leerkrag nou die vraag stel of die appeltertprobleem (of 'n soortgelyke probleem) nie op dieselfde neerkom nie. Indien dié konseptuele onderhandeling met leerlinge suksesvol is, kan die leerkrag dan die suggestie maak dat die prosedure waarby leerlinge nou uitgekome het, naamlik $(20 \times 4) \div 3$, beskou kan word as deling met $\frac{3}{4}$. Op 'n (veel) later stadium, nadat leerlinge geleer het om met breuke te vermenigvuldig, sou 'n leerkrag aan die leerlinge kon uitwys dat daar 'n verband is tussen hul metode om $20 \div 34$ te bereken, en hul metode om 20×43 te bereken. 'n Klasgesprek hieroor sou kon uitloop op die waarneming dat leerlinge se metode om 'n breuk te behandel ook beskryf kan word as *vermenigvuldig met die omgekeerde (resiprook) van die breuk*. Hierdie perspektief sou as een van die konseptuele aanleidings kon dien om 'n formele strukturele perspektief op bewerkings, in terme van inverse bewerkings en die bewerkingsinverses van getalle (vermenigvuldigingsinverse, optellingsinverse) met leerlinge te ontwikkel.

Bostaande dien ter illustrasie van hoe leerders, met ondersteuning van 'n leerkrag, vir-hulle nuwe wiskundige kennis kan produseer deur 'n goed gekose probleem met oorgawe aan te pak. In die volgende paragraaf gee ons ter oriëntering 'n kort oorsig van die ontplooiing van perspektiewe oor probleemoplossing as aspek van wiskundeonderwys oor die afgelope halfeeu.

DIE BEWEGING NA PROBLEEMOPLOSSING IN WISKUNDEONDERWYS SEDERT 1980

In die beweging na probleemoplossing het die klem aanvanklik sterk op bekwaamheid tot probleemoplossing as doel met wiskundeonderwys geval, oftewel op onderrig vir probleemoplossing. Die klem het egter geleidelik na onderrig en leer deur probleemoplossing verskuif.⁵ Schoenfeld (1998:93) beskryf sy doel met 'n "problem solving course" wat hy gereeld by die universiteit van California (Berkeley) aanbied soos volg: "In broadest terms, my goals are that the students will learn to **think mathematically**".

⁵ Vergelyk byvoorbeeld Lester *et al*, soos aangehaal deur Taplin (2006).

Sedert die laat tagtigerjare word ’n verskeidenheid eksperimentele programme waarin leer deur probleemoplossing benut word in die VSA en ander lande geloods. Hieronder tel die *Calculus in Context* projek op tersiêre vlak (Callaher *et al*, 1994), en die *Connected Mathematics* en *Interactive Mathematics* handboekreeks (hoërskoolprogramme) in die VSA. Op primêre skoolvlak loods Cobb (1991), Wood en Sellers (1996), Wheatley (1992) en Fennema en Carpenter (Hiebert *et al*, 1997) innoverende kleinskaalprogramme wat as belangrike leeromgewings ten opsigte van die praktiese uitvoering van probleemgesentreerde wiskundeonderwys funksioneer. Ook in Suid-Afrika word daar in die periode 1988-1994 ’n probleemgesentreerde benadering tot wiskundeonderwys in primêre skole van stapel gestuur.⁶ Soortgelyke innoverende programme word in dieselfde tydperk intensief in onder andere Nederland, onder die banier Realisties Wiskunde Onderwijs (vergelyk Gravemeijer, 1996), en in Frankryk (Artigue & Houdement, 2007:365) bedryf. Sedertdien word talle soortgelyke onderrigeksperimente in verskillende wêrelddele uitgevoer, in wiskundeonderwys op alle skoolvlakke asook op universiteitsvlak. Twee invloedryke voorbeelde is dié van Rasmussen en sy medewerkers op tersiêre vlak (Rasmussen & Blumenfeld 2007: 207), en Cobb en sy medewerkers se program oor inleidende statistiek vir die middelskool (Cobb *et al*, 2001 en 2004). Van die mees onlangse studies is dié van Cotic en Zuljan (2009) in Slovenië, en Ridlon (2009) met minder bevoorregte leerlinge in die VSA.

Vanaf die laat negentigerjare word in talle lande op nasionale vlak nuwe wiskunde kurrikula aangekondig waarin aan probleemoplossing ’n sentrale plek verleen word, beide in die sin dat die ontwikkeling van bevoegdheid om probleme op te los ’n prioriteitsdoelstelling is (en onderrig vir probleemoplossing dus beklemtoon word), en in die sin dat leer deur probleemoplossing as ’n klaskamerpraktiek aanbeveel word. Met verwysing na nasionale wiskunde kurrikulumdokumente in Engelssprekende lande (insluitende Singapoer) skryf Stacey (2005:343 en 346) dat beide onderrig vir en leer deur probleemoplossing beklemtoon word: “... the ideal is conveyed that problem solving is absorbed into normal teaching, as an attitude to learning and a process underpinning achievement in the normal curriculum”.

Sedert die vroeë negentigerjare plaas wiskunde-opvoeders toenemend ’n premie op die rol van wiskundige gesprek en sosiale interaksie in die onderrig en leer van wiskunde (vergelyk Cobb, 2001 en 2006). Hierdie aspekte vorm dan tesame met die klem op probleemoplossing die huidige-oorheersende vernuwingsagenda (“reform agenda”) vir wiskundeonderwys.

NEERSLAG IN ONDERWYSPRAKTYKE, EN STRUIKELBLOKKE

Leidende wiskunde-opvoeders in verskillende lande wys in die spesiale uitgawe oor probleemoplossing van die tydskrif, *ZDM International Journal for Mathematics Education* (2007), daarop dat alhoewel onderrig vir en leer deur probleemoplossing in hul onderskeie lande se nasionale kurrikulumbeleid voorgeskryf word, dit slegs tot ’n beperkte mate in klaskamerpraktiek neerslag vind.⁷ ’n Verskeidenheid redes vir die beperkte implementering word deur die bogenoemde skrywers aangedui, insluitende dié wat vervolgens kortliks bespreek word.

⁶ Vergelyk Murray, Human & Olivier (1998) asook Hiebert *et al* (1996 en 1997).

⁷ Nederland (Doorman *et al*, 2007), Brittanje (Burkhardt & Bell, 2007), die V.S.A. (Schoenfeld, 2007), Italië (Boero & Daputo, 2007), Frankryk (Artigue & Houdement, 2007), Australië (Clarke *et al*, 2007), Singapoer (Fan & Zhu, 2007), Japan (Hino, 2007).

Eksaminering

Schoenfeld (2007), Burkhardt en Bell (2007), en Doorman *et al* (2007) verwys almal na die negatiewe effek wat staatsvoorgeskrewe eksamenpraktyke op die implementering van onderrig vir en deur probleemoplossing in die praktyk het, onder meer omdat probleemoplossing as sodanig nog nie in ooreenstemming met nuwe kurrikulumdoelstellings geëvalueer word nie. Schoenfeld en 'n span medewerkers se onlangse werk oor die evaluering van wiskundige kundigheid (“mathematical proficiency”) (Schoenfeld, 2007b) is 'n ernstige poging om hierdie uitdaging aan te spreek, en die internasionale PISA projek (OECD, 2004) kan ook 'n verskil in dié verband teweegbring. In Suid-Afrika word sedert 2008 met die Foundations for Learning (FFL) aksie van die nasionale onderwysdepartement 'n ernstige poging aangewend om implementering van die bestaande kurrikulumriglyne ten opsigte van onderrig vir en deur probleemoplossing te ondersteun. Die skrywer en sy kollegas merk egter in klaskamers (in grade 2 tot 6) op dat die gereelde (kwartaallikse) eksterne eksaminering wat nou as deel van die FFL-aksie gedoen word, juis 'n negatiewe effek op die implementering van 'n groter klem op probleemoplossing het. Leerkragte spandeer nou baie tyd daaraan om eksamenvoorbereiding te doen, en die werk in die klas behels dan hoofsaaklik oefening in die soort vrae wat in die eksamen verwag word, wat nie probleemoplossing insluit nie.

Misverstande

Sierpinska (soos aangehaal deur Artigue & Houdement (2007: 378)) wys op die verskynsel dat leerkragte geneig is om 'n aanbeveling soos “doen nie net X soos jy altyd gedoen het nie, doen ook Y” te vertolk as “doen nou nie meer X nie, doen net Y”. Artigue en Houdement meen dat hierdie verskynsel aanleiding daartoe gee dat 'n kurrikulêre aanbeveling om leerlinge se eie planne om 'n probleem op te los te respekteer, dikwels vertolk word as 'n instruksie om leerlinge se planne (byvoorbeeld hule rekenmetodes), hoe lomp en onafgerond dit ookal mag wees, net so te laat en geen poging aan te wend om leerlinge daartoe te lei om meer gesofistikeerd te raak nie.⁸ Insgelyks vertolk leerkragte dikwels die aanbeveling om leerlinge toe te laat om hul eie kennis te konstrueer as 'n instruksie om geen verantwoordelikheid vir die konstruksie van kennis deur leerlinge te neem nie (vergelyk Ellerton *et al*, 1992). Die skrywer en sy kollegas neem dikwels hierdie verskynsels in graad 2 en 3 klaskamers in Suid-Afrika waar.

'n Ander misverstand van wat in kurrikula ten opsigte van probleemoplossing aanbeveel word, het te doen met die verskillende vorme wat 'n klem op probleemoplossing kan aanneem. Met verwysing na handboekreeks (Amerikaans: *curricula*) wat na aanleiding van die *Curriculum and Evaluation Standards* (1989) van die Amerikaanse NCTM ontwikkel is, skryf Kahan en Schoen (2003: 170):

[.] . . the curricula that have been developed to align with these recommendations support teaching mathematics through problem solving. In this approach, the focus is on the mathematical residue that results from the process of sense making that accompanies students' work on problems. The solution of the problem is not itself the main focus.

Dit gebeur egter dat leerkragte, selfs wanneer hulle kurrikulum materiaal wat vir leer *deur* probleemoplossing ontwerp is gebruik, steeds hoofsaaklik onderrig *vir en oor* probleemoplossing.

⁸ Vergelyk Cobb *et al* (2008) en Cobb in Cobb *et al* (2000: 11 en 361) oor die rol van die leerkrag in dié verband.

Pehkonen (2005:5) meen dat dit ook in Finland die geval is. Die skrywer en sy kollegas neem hierdie verskynsel dikwels in Suid-Afrikaanse klaskamers waar. Een moontlike oorsaak is dat leerkragte bloot nie “die boodskap kry nie”: dat hulle lees of hoor dat leerlinge probleme moet aanpak en dat hulle dan sonder meer aanneem dat hulle die leerlinge moet leer (onderrig) hoe om die probleme aan te pak en op te los. ’n Ander moontlike oorsaak is dat leerkragte wel probeer om leer deur probleemoplossing te bevorder, maar dat hulle geduld verloor wanneer leerlinge nie vinnig genoeg na hulle sin vorder nie, dan meen dat dit nie in die betrokke geval sal werk nie, en dan oorskakel na onderrig vir probleemoplossing. Artigue en Houdement (2007:378) berig dat die onderskeid tussen die verskillende vorme van probleemoplossing ook in Franse skole vertroebel word wanneer leerkragte dit uitdagend vind om leer deur probleemoplossing suksesvol te implementeer.

Onvoldoende kundigheid by leerkragte

Daar kan min twyfel wees dat onderrig vir probleemoplossing en probleemgesentreerde wiskunde-onderrig beduidende en spesifieke eise aan leerkragte stel, en dat bepaalde kundighede vereis word. Windschitl (1999:753) skryf:

[.].. instruction, especially that which is based on design tasks or problem solving, places high demands on the teacher’s subject-matter understanding. The teacher must not only be familiar with the principles underlying a topic of study but must also be prepared for the variety of ways these principles can be explored.

Dit gaan hier oor sogenaamde “pedagogic content knowledge” (vergelyk Ball *et al*, 2008; Hill *et al*, 2008).

Bostaande dui daarop dat intensiewe (her)opleiding van leerkragte, asook substansiële professionele ondersteuning, nodig is om ’n situasie te skep waarin dit enigsins verwag kan word dat beduidende implementering van leer deur probleemoplossing sal plaasvind. Hierdie behoefte word moontlik dikwels deur kurrikulumbestuurders onderskat – dit is beslis in Suid-Afrika die geval. Stigler en Hiebert (1999:85-102) wys daarop dat klaskamerpraktyke eintlik kultuurpraktyke in die volle sin van die woord is, wat uiters moeilik is om te verander. Schoenfeld (1987:214) stel dit so:

[.] . . these curriculum reforms reflect an attempt to embed a selected aspect of mathematical thinking into what is an essentially alien culture, that of the traditional classroom. As long as the two cultures differ as radically ... it may be impossible for this kind of embedding to succeed. Fragments of the mathematical culture, in isolation, are likely to wither in the classroom for lack of support, or they may be so changed by their absorption into the classroom culture that they will not translate back outside of it.

In die meeste lande word die implementering van nuwe kurrikula waarin onderrig vir en deur probleemoplossing beklemtoon word, ondersteun met gepubliseerde riglyne vir leerkragte. Ook in Suid-Afrika word tans, as deel van die *Foundations for Learning programme*, opnuut aandag gegee aan die ontwikkeling van ondersteunende dokumentasie vir leerkragte, met die oog op meer effektiewe implementering van die Hersiene Nasionale Kurrikulum Beleid, veral wat die rol van probleemoplossing in wiskundeonderwys betref. Artigue en Houdement (*loc. cit.*) berig dat die onderwysowerhede in Frankryk besonder moeite gedoen het om doeltreffende riglyndokumente ter ondersteuning van die implementering van onderrig deur probleemoplossing te produseer.

Hulle wys daarop dat die taakspan wat daarvoor verantwoordelik was dit besonder uitdagend gevind het om riglyne te skryf wat vir leerkragte toeganklik sou wees en wat nie vatbaar vir misverstande sou wees nie.

SLOTOPMERKINGS

Die vraag is of dit in Suid-Afrika die moeite sal loon om daadwerklike pogings aan te wend om leer vir en deur probleemoplossing op 'n beduidende skaal in ons klaskamers te vestig.

Dit is moontlik goed om kennis te neem van die feit dat, alhoewel pogings om leer deur en vir probleemoplossing in ander lande in klaskamers te vestig tot dusver slegs in 'n beperkte mate suksesvol was, daar geen tekens van 'n staking van sulke pogings is nie. Intendeel, die verslae uit ander lande (kyk vorige paragraaf) dui eerder op 'n toename in intensiteit en toewyding van implementeringspogings. Hierdie pogings word gerugsteun deur omvangryke en toenemend meer diepgaande navorsing oor die aard van suksesvolle onderrig vir en deur probleemoplossing, oor die impak wat dit op die gehalte van leeruitkomste het, oor die uitdagings verbonde aan implementering, en oor nuwe strategieë vir heropleiding en professionele ondersteuning van leerkragte (vergelyk byvoorbeeld Koellner *et al*, 2007 in laasgenoemde verband). Dit dien veral daarop gelet te word dat daar sedert die verbroekeling van die “moderne wiskunde” beweging in die sewentigerjare, en die besef dat bloot mededelende onderrig en oefening nie die gewenste resultate lewer nie, geen ander beduidende alternatief met die oog op meer suksesvolle wiskundeonderrig, as 'n meerdere klem op probleemoplossing en sosiaal-interaktiewe leer na vore getree het nie. Welliswaar is onvoldoende kennis en begrip van wiskunde by leerkragte in baie lande, insluitende Suid-Afrika, 'n onbetwisbare beperking op die gehalte van wiskundeonderrig, en die argument kan met reg aangevoer word dat wiskundeonderrig beduidend verbeter kan word bloot deur hierdie probleem effektief aan te spreek. Dat dit aangespreek moet word, spreek vanself; dit is ook 'n vanselfsprekende voorwaarde vir die suksesvolle implementering van 'n meerdere klem op probleemoplossing en sosiaal-interaktiewe leer, of enige ander alternatief wat mettertyd na vore mag tree. Dit is egter 'n ope vraag of 'n meerdere klem op probleemoplossing en sosiaal-interaktiewe leer nie juis ook die aangewese weg is om wiskundeonderrig beters te lei nie.

Daar is dus sterk aanduidings dat onderrig vir, en leer deur, probleemoplossing wêreldwyd 'n toenemende sterk rol in wiskundeonderrig sal speel. Tensy ander alternatiewe vir tradisionele mededelende wiskundeonderrig na vore sal tree – en tans is daar nie aanduidings dat dit sal gebeur nie – is dit redelik om te verwag dat die wêreld in die afsienbare toekoms eerder die meer kundige en intensiewe implementering van probleemoplossing en sosiaal-interaktiewe leer as 'n wegbeweeg daarvan sal beleef. Uit hoofde hiervan sou 'n mens kon argumenteer dat dit vir Suid-Afrika belangrik is om, ten spyte van die enorme uitdagings daaraan verbonde, dieselfde weg te volg. Wat wiskundeonderrig op primêre skoolvlak betref, is dit dan ook die amptelik-ingeslane weg waarop ons tans verkeer. Die skaarsheid, in Suid-Afrika, aan wiskunde-opvoeders wat goed onderlê is in wiskunde-didaktiek in die breë, en in die verskillende aspekte van die vernuwingsagenda, is egter 'n beduidende belemmernis. Tensy hierdie behoefte spoedig aangespreek word, byvoorbeeld deur 'n aantal deskundiges oorsee te werf en/of nagraadse en informele opleidingsprogramme in wiskunde-didaktiek in Suid-Afrika te versterk, staar ons die risiko in die gesig om spoedig, wat wiskundeonderrig betref, by die wêreld agter te raak.

BIBLIOGRAFIE

- Artigue, M & Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM Mathematics Education*, 39: 365-382.
- Ball, D., Hoover, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59:389.
- Boaler, J., & Greeno, J.G. (2000). *Identity, agency, and knowing in mathematical worlds*. In J.Boaler (ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*. Stamford, CT, Ablex, pp.171-200.
- Boero, P & Dapueto, C. (2007). Problem solving and mathematics education in Italy: Dream and reality. *ZDM Mathematics Education*, 39:383-393.
- Burkhardt, H. *et al.* (eds). (1985). *Problem Solving — A World View; Proceedings of Problem Solving Theme Group ICME-5*. Nottingham, Shell Centre for Mathematics Education.
- Burkhardt, H. & Bell, A. Problem solving in the United Kingdom, *ZDM Mathematics Education*, 39:383-393.
- Callaheer, J., Cox, A., Hoffman, K.R., O'Shea, D., Pollatsek, H. & Senechal, L. (1995). *Calculus in Context*. New York. W.H. Freeman and Co.
- Carraher, T. N., & Schliemann, A. D. (1985). Computational routines prescribed by schools: Help or hindrance? *Journal for Research in Mathematics Education*, 16:37-44.
- Carpenter, T.P., Fennema, E., Fuson, K., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A. & Wearne, D. (1999). Learning basic number concepts and skills as problem solving. In E. Fennema & T.A. Romberg (eds), *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah, NJ: Erlbaum, pp.45-61.
- Clarke, D., Goos, M. & Morony, W. Problem solving and working mathematically: an Australian perspective. *ZDM Mathematics Education*, 39:475-490.
- Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(2): 3-29.
- Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1991). Learning through problem solving: A constructivist approach to second grade mathematics. In E. von Glasersfeld (ed.), *Constructivism in mathematics education*. Holland: Kluwer, pp. 157-176.
- Cobb, P., & McClain, K. (2004). Proposed design principles for the teaching and learning of elementary statistics. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (eds), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer, pp.375-396.
- Cobb, P. (2006). Mathematics learning as a social process. In J. Maas & W. Schlöglmann (eds), *New mathematics education research and practice*. Rotterdam, The Netherlands: Sense, pp. 147-152.
- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences*, 10:113-164.
- Cobb, P., Zhao, Q. & Visnovska, J. (2008). Learning from and adapting the theory of Realistic Mathematics Education. *Éducation & Didactique*, 2(1):105-124.
- Cobb, P., Gresalfi, M., Hodge, L.L. (2009). An Interpretive Scheme for Analyzing the Identities That Students Develop in Mathematics Classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(1):40-68.
- Cockroft, W.H. (1982). *Mathematics counts*. Report of the Committee of Inquiry into the teaching of mathematics in schools under the chairmanship of Dr WH Cockcroft. London: Her Majesty's Stationery Office.
- Coti, M. & Zuljan, V. (2009). Problem-based instruction in mathematics and its impact on the cognitive results of the students and on affective-motivational aspects. *Educational Studies*, 35(3):297-310.
- Doorman, D., Drijvers, P., Dekker, T., van den Heuvel-Panhuizen, M., de Lange, J. & Wijers, M. Problem solving as a challenge for mathematics education in The Netherlands. *ZDM Mathematics Education*, 39:405-418.
- Ecole d'Humanité. http://www.ecole.ch/english/docs/philosophy_e.pdf. [15 September 2009].
- Ellerton, N. F., & Clarkson, P. C. (1992). Language factors in mathematics education. In B. Atweh & J. Watson (eds), *Research in mathematics education in Australasia 1988-1991*. Brisbane, Mathematics Education Research Group of Australasia, pp. 153-178.
- Fan, L. & Zhu, A.Y. (2007). From convergence to divergence: the development of mathematical problem solving in research, curriculum, and classroom practice in Singapore. *ZDM Mathematics Education*, 39:491-501.

- Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-β Press /Freudenthal Institute.
- Henningsen, M. & Stein, M.K. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5):524–549.
- Hiebert, J., Carpenter, T.P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A. & Wearne, D. (1996). Problem Solving as a Basis for Reform in Curriculum and Instruction: The Case of Mathematics. *Educational Researcher*, 25(4): 12 – 21.
- Hiebert, J., Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, J., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.
- Hill, H.C., Blunk, M.L., Charalambous, C.Y., Lewis, J.M., Phelps, G.C., Sleep, L. & Ball, D.L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study, *Cognition and Instruction*, 26(4):430 -511.
- Hino, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: trends in mathematical problem solving in Japan. *ZDM Mathematics Education*, 39:503–514.
- Huat, J.N.G. & Huat, L.K. (2001). *A handbook for mathematics teachers in primary schools*. Singapore, Marshall Cavendish Education.
- Kahan, J.A. & Schoen, H.L. (2003). Visions of problems and Problems of Vision: Embracing the Messiness of Mathematics in the World. (Book review). *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2):168-178.
- Kamii, C. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1–4. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (eds). *The teaching and learning of algorithms in school mathematics: 1998 yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp.130-140.
- Koellner, K., Jacobs, J., Borko, H., Schneider, C., Pittman, M.E., Eiteljorg, E., Bunning, K. & Frykholm, J. (2007). The Problem-Solving Cycle: A Model to Support the Development of Teachers' Professional Knowledge. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3): 273–303.
- Moseley, B. & Brenner, M.E. (2009). A comparison of curricular effects on the integration of arithmetic and algebraic schemata in pre-algebra students. *Instructional Science*, 37:1–20.
- Murray, J.C., Human, P.G., & Olivier, A.I. (1998). Learning through problem solving. In *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Stellenbosch, South Africa.
- National Council of Teachers of Mathematics. 1991. *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Pehkonen, Erkki (2008). Voordrag gelewer by die “100th Anniversary of ICMI”. Rome, 5-8 Maart 2008. <http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG2/Papers/PEHKON.pdf>. [18 September 2009].
- Polya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, 2nd ed. Princeton University Press: Princeton, NJ.
- Rasmussen, C. & Blumenfeld, H. (2007). Reinventing solutions to systems of linear differential equations: A case of emergent models involving analytic expressions. *Journal of Mathematical Behavior*, 26 (2007):195–210.
- Ridlon, C.L. (2009). Learning Mathematics via a Problem-Centered Approach: A Two-Year Study. *Mathematical Thinking and Learning*, 11:188–225.
- Savery, J.R., & Duffy, T.M. (1995). *Educational Technology*, 35:31-38.
- Schoen, H. L., & Charles, R. I. (2003). *Teaching mathematics through problem solving: Grades 6-12*. Reston, VA. National Council of Teachers of Mathematics.
- Schoenfeld, A. H. (1985). In Burkhardt, H. et al. (eds). (1985). *Problem Solving — A World View; Proceedings of Problem Solving Theme Group ICME-5*. Nottingham, Shell Centre for Mathematics Education, p 4.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In: D. Grouws (eds), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan, pp. 334-370.

- Schoenfeld, A. (ed.). (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Schoenfeld, Alan H., Kaput, J. & Dubinsky, E. (eds). (1998). *Research in Collegiate Mathematics Education III*. Providence, American Mathematical Society.
- Schoenfeld, Alan H. (2007a). Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics. *ZDM Mathematics Education*, 39:537–551.
- Schoenfeld, A (ed.). (2007b). *Assessing Mathematical Proficiency*. Cambridge, Cambridge University Press.
- Senk, S., & Thompson, D. (eds). (2003). *Standards-oriented school mathematics curricula: What does the research say about student outcomes?* Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Silver, E. A., & Lane, S. (1995). Can instructional reform in urban middle schools help students narrow the mathematics performance gap? Some evidence from the *QUASAR Project*. *Research in Middle Level Education Quarterly*, 18(2):49–70.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist viewpoint. *Journal for research in mathematics education*, 26:114-145.
- Schreuder, T.L. & Lester, F.J. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In Trafton, P.R. & Shulte, A.P. (eds). *New Directions for Elementary School Mathematics*, Reston, VA, pp. 31-42.
- Sfard, A. (1998). On two metaphors of learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher* 27(2): 4-11.
- Silver (ed.), (1984). *Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, pp.41-69.
- Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *Journal of Mathematical Behavior* 24: 341–350.
- Stigler, J.W., & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap*. New York, N.Y.: Free Press.
- Taplin, M. (2008). *Mathematics Through Problem Solving. The Role of Problem Solving in Teaching Mathematics as a Process*. http://www.mathgoodies.com/articles/problem_solving.html [18 Augustus 2009].
- Taylor, C.A. Glover, O.H., Kriel, D.J. & Meyer, J.A.M. (1995). 'n *Evaluering van die probleemgesentreerde benadering tot Wiskunde-onderrig*. Ongepubliseerde interne verslag, Kaaplandse Onderwys-departement.
- Van Oers, B. (2004). *Steps towards a sociocultural theory of learning*. <http://home.planet.nl/~oers0054/Steps%20towards%20a%20sociocultural%20theory%20of%20learning.pdf> [14 Oktober 2009].
- Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2002) *Making sense of word problems* Lisse [Netherlands] : Swets & Zeitlinger Publishers.
- Wagenschein, M. (1956). Zum Begriff des Exemplarischen Lehrens, *Zeitschrift fuer Padagogik*, 2(3):122-153.
- Wagenschein, M. (2000). Teaching to understand. <http://www.natureinstitute.org/txt/mw/exemplary.htm> [13 September 2009]
- Warfield, V. M. (2006). *Invitation to didactique*. <http://www.math.washington.edu/~warfield/Didactique.html> [4 September 2009].
- Westbury, I., Hopmann, S. & Riquarts, T. (2000): *Teaching as a reflective practice: the German Didaktik tradition*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Wheatley, G. (1992). The role of reflection in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 23:521-549.
- Windschitl, Mark (1999). The Challenges of sustaining a Constructivist Classroom Culture. *Phi Delta Kappan*, June 1999.
- Wittmann, E. (1971). Complementary attitudes in problem solving. *Educational Studies in Mathematics* 4(2):243-251.
- Wittmann, E. (1969). The development of self-reliant thinking in mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 2(1):122 – 133.
- Wood, Terry & Patricia Sellers. "Assessment of a Problem-Centered Mathematics Program: Third Grade." *Journal for Research in Mathematics Education* 27 (May 1996): 337–353.